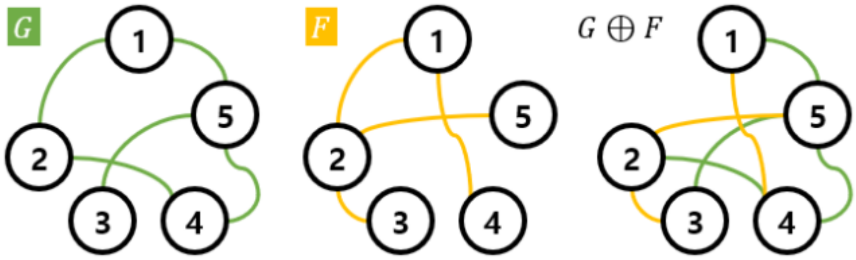
Graph Group Problem

한국과학기술원 수리과학과 김준영

문제. n개의 레이블된 심플 그래프의 집합 G_n 위에 다음과 같이 정의된 연산 $\oplus$이 있다.

임의의 $G, F \in G_n$에 대해 G, F 중 하나만 에지 (i, j)가 존재하면, 그래프 $G \oplus F$에도 에지 (i, j)가 존재하고, 둘 다 존재하거나 존재하지 않는 경우, 그래프 $G \oplus F$에는 에지 (i, j)가 존재하지 않는다.

예를 들어, 다음과 같다.



이때, $(G_n, \oplus)$는 가환군임을 보여라.

관찰 1. **G_n의 원소의 인접행렬(adjacency matrix)는 대각성분이 0이고, 모든 성분이 0 또는 1인 대칭행렬이다. 역으로, 그러한 인접행렬을 갖는 그래프는 G_n의 원소이다.**

- 루프가 없으므로 대각성분은 모두 0이다.
- 서로 다른 꼭짓점을 잇는 변은 최대 1개 존재할 수 있으므로 모든 성분은 0(연결되어 있지 않음) 또는 1(연결되어 있음)이다.
- 유향이 아니므로 인접행렬은 대칭행렬이다.

즉, G_n의 원소는 항상 다음과 같은 꼴의 인접행렬을 가진다.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

대각성분이 0이고, 모든 성분이 0 또는 1인 n차 대칭행렬의 집합을 A라 하자.

관찰 2. $G, F \in G_n$에 대해 G, F의 인접행렬을 각각 A_G, A_F라 하자.

(case 1) G는 에지 (i, j)를 갖고, F는 갖지 않는다.

이 경우, $[A_G]_{ij} = 1, [A_F]_{ij} = 0,\ [A_{G \oplus F}]_{ij} = 1$이다.

(case 2) F는 에지 (i, j)를 갖고, G는 갖지 않는다.

이 경우, $[A_G]_{ij} = 0, [A_F]_{ij} = 1,\ [A_{G\oplus F}]_{ij} = 1$이다.

(case 3) G와 F는 에지 (i,j)를 갖는다.

이 경우, $[A_G]_{ij} = 1, [A_F]_{ij} = 1,\ [A_{G\oplus F}]_{ij} = 0$이다.

(case 4) G와 F는 에지 (i,j)를 갖지 않는다.

이 경우, $[A_G]_{ij} = 0, [A_F]_{ij} = 0,\ [A_{G\oplus F}]_{ij} = 0$이다.

우리는 인접행렬의 덧셈 구조가 유한체 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$의 덧셈 구조와 같다는 것을 알 수 있다. 이 관찰을 요약하면 다음과 같다.

- 관찰 1에 의해, **$\boldsymbol{G_n}$의 원소의 인접행렬은 체 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +_2, \cdot_2)$ 위에서 정의된 행렬로 볼 수 있다.**

- 관찰 2에 의해, **$\boldsymbol{G_n}$의 원소의 인접행렬의 덧셈은 다음과 같이 componentwise하게 정의된다.**

$$[\boldsymbol{A_{G\oplus F}}]_{\boldsymbol{ij}} = [\boldsymbol{A_G}]_{\boldsymbol{ij}} +_2 [\boldsymbol{A_F}]_{\boldsymbol{ij}}$$

관찰 3. **$\boldsymbol{G_n}$ 위에서 정의된 연산 $\oplus$은 이항연산이다. 즉, 닫혀있다.**

- 임의의 $G, F \in G_n$에 대해, G, F의 인접행렬의 대각성분은 0이므로 관찰 2에 의해 $[A_{G\oplus F}]_{ii} = 0$

- 임의의 $G, F \in G_n$에 대해, G, F의 인접행렬은 체 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 위에서 정의된 행렬로 볼 수 있으므로, 관찰 2에 의해 $[A_{G\oplus F}]_{ij}$은 0 또는 1이다.

- 임의의 $G, F \in G_n$에 대해, G, F의 인접행렬은 대칭이므로 관찰 2에 의해 $[A_{G\oplus F}]_{ij} = [A_{G\oplus F}]_{ji}$.

따라서, $A_{G\oplus F}$는 대각성분이 0이고, 모든 성분이 0 또는 1이며, 대칭행렬이므로 관찰 1에 의해 $G \oplus F$는 G_n의 원소이다.

관찰 1, 2, 3에 의해 두 binary algebraic structure $(G_n, \oplus)$와 $(A, +_2)$는 동형(isomorphic)이다. 즉, $(G_n, \oplus)$가 가환군임을 보이는 문제는, $(A, +_2)$가 가환군임을 보이는 것과 같다. 행렬의 성질과 $+_2$의 정의에 의해 결합법칙과 교환법칙이 성립함은 자명하다. 영행렬이 $(A, +_2)$의 항등원이 된다는 사실로부터 null graph가 $(G_n, \oplus)$의 항등원이 됨을 알 수 있다. 마지막으로, 연산 $+_2$에 대한 역원은 자기 자신이므로 그래프 G의 역원은 G가 된다. 또한, 이렇게 정의된 항등원과 역원은 단 하나의 인접행렬로 정의되므로 유일하다.